

Cálculo de prêmios

Aula 14

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br

<https://www.portalhalley.org/materiais.html#notas>



➤ Notas de aula da disciplina Teoria do Risco oferecida pelo curso de Bacharelado em Ciências Atuariais da Universidade Federal de Alfenas, Campus Varginha.

PIRES, M.D. **Cálculo de prêmios**. [Notas de aula]. Universidade Federal de Alfenas, Curso de Ciências Atuariais, Alfenas, 2026. Disponível em: <https://www.portahalley.org/materiais.html#notas>. Acesso em: 28 jun. 2026.

Cálculo de prêmios

- Prêmio de seguro é o valor pago pelo segurado à seguradora em troca da transferência do risco.
- Para a seguradora, o conjunto de prêmios arrecadados deve ser suficiente para cobrir as indenizações, as despesas operacionais, os tributos, o custo de capital e a margem de resultado desejada.

Cálculo de prêmios-Métodos básicos de tarifação

➤ Métodos de Julgamento ou subjetivo

É um processo subjetivo no qual a tarifa é definida pelo subscritor, por comparação com riscos similares.

➤ Métodos teóricos

Baseia-se em um modelo probabilístico para a frequência e a severidade das perdas.

➤ Método empíricos

Consiste em dividir as perdas esperadas ou observadas pelo número de unidades expostas ao risco.

Cálculo de prêmios-Métodos básicos de tarifação

➤ Métodos teóricos

➤ Prêmio puro de risco

Valor esperado das indenizações acrescidos de um carregamento de segurança estático

➤ Prêmio carregado com margem de segurança

Carregamentos adicionais associados a lucro, e despesas

Princípio de cálculo de prêmio

- O prêmio de uma seguradora é a função que associa à variável aleatória relacionada ao gasto da seguradora com o sinistro (S) de uma determinada apólice com um número real Π_S , tal que:

$$\Pi_S = g(S)$$

- Π_S é o que o segurador recebe (**Fixo**).
- S está relacionado o quanto é pago ao segurado (**indenização**),
- O ganho da seguradora é dado por $(\Pi_S - S)$ (**Variável aleatória**).

*a regra $g(S)$ que atribui um valor numérico a Π_S é o chamado princípio de cálculo de prêmio.

EXEMPLO 1: Determinado princípio de precificação estabelece que o prêmio Π_S para um risco S é dado por:

$$\Pi_S = f^{-1}(E[f(S)])$$

Em que g é uma função tal que para $x > 0$, $f(x) = x^2$. Calcule Π_S , dado que $S \sim \text{Gama}(2,2)$.

SOLUÇÃO:

$$\Pi_S = \sqrt{E(S^2)} = \sqrt{\text{var}(S) + E(S)^2}$$

$S \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta) \rightarrow E(S) = \frac{\alpha}{\beta}$ e $\text{var}(S) = \frac{\alpha}{\beta^2}$, então:

$$\Pi_S = \sqrt{\frac{1}{2} + 1} = 1,225$$

Princípio de cálculo de prêmio

- Por vezes as possíveis indenizações a serem pagas são o resultado do somatório de n indenizações individuais.
 - Modelo de risco individual.
 - Após o cálculo do prêmio global, o mesmo é distribuído pelas apólices individuais.
 - Não necessariamente o prêmio é dividido em partes iguais.
- No modelo coletivo, o prêmio é calculado a partir da distribuição do montante agregado de sinistros. Sua alocação entre as apólices exige um critério adicional, que pode considerar exposição, frequência esperada, severidade esperada ou contribuição marginal ao risco

Princípio de cálculo de prêmio

Princípio do prêmio de risco (prêmio líquido, prêmio puro)

$$\Pi_S = E(S)$$

O princípio mais simples, baseado unicamente no valor esperado da variável aleatória das possíveis indenizações.

EXEMPLO 2: Considere uma apólice de seguro em que os valores gastos com sinistros são modelados por distribuição exponencial de parâmetro $\alpha = 0,2$. A seguradora determina que irá cobrar um prêmio baseado no quanto se espera gastar com indenizações, porém esse valor não deve exceder 4,5. Calcule o valor esperado sujeito a esse limite técnico.

SOLUÇÃO:

SOLUÇÃO:

$$Y = \begin{cases} X, & X < 4,5 \\ 4,5, & X \geq 4,5 \end{cases}$$

$$E(Y) = E(X; 4,5) = \int_0^{4,5} x \, 0,2 \, e^{-0,2x} dx + 4,5 \int_{4,5}^{\infty} 0,2 \, e^{-0,2x} dx$$

$$u = x, \quad dv = e^{-0,2x} dx, \quad \rightarrow \quad du = dx \quad \text{e} \quad v = -\frac{e^{-0,2x}}{0,2}$$

$$\begin{aligned} 0,2 \int_0^{4,5} x e^{-0,2x} dx &= 0,2 \left(-x \frac{e^{-0,2x}}{0,2} \Big|_{x=0}^{x=4,5} + \int_0^{4,5} \frac{e^{-0,2x}}{0,2} dx \right) \\ &= -x e^{-0,2x} \Big|_{x=0}^{x=4,5} + \left(-\frac{e^{-x0,2}}{0,2} \Big|_{x=0}^{x=4,5} \right) = 1,13759 \end{aligned}$$

$$E(Y) = E(X; 4,5) = 1,13759 + 4,5 (e^{-0,2 \times 4,5}) = 2,967152$$

EXEMPLO 3: Considere a função de probabilidade:

$$P_{Scol}(s) = \begin{cases} 0,36 & s = 0 \\ 0,0240 & s = 1000 \\ 0,0724 & s = 2000 \\ 0,3864 & s = 3000 \\ 0,0164 & s = 4000 \\ 0,0384 & s = 5000 \\ 0,1024 & s = 6000 \end{cases}$$

Considere que o limite de indenização para essa carteira seja de 4000,00, o valor do prêmio puro de risco a ser cobrado será?

$$P_{S_{col}}(s) = \begin{cases} 0,36 & s = 0 \\ 0,0240 & s = 1000 \\ 0,0724 & s = 2000 \\ 0,3864 & s = 3000 \\ 0,0164 & s = 4000 \\ 0,0384 & s = 5000 \\ 0,1024 & s = 6000 \end{cases}$$

Seja Y , tal que:

$$Y = \begin{cases} S_{col}, & S_{col} < 4000 \\ 4000, & S_{col} \geq 4000 \end{cases}$$

$$\Pi_Y = E(Y) = E(S_{col}; 4000)$$

$$\Pi_Y = \sum_{s=0}^{3000} s P(s) + \sum_{s=4000}^{6000} 4000 P(s) = 1956,8$$

Princípio de cálculo de prêmio

Princípio do prêmio de risco (prêmio líquido, prêmio puro)

$$\Pi_S = E(S)$$

O princípio mais simples, baseado unicamente no valor esperado da variável aleatória das possíveis indenizações.

Princípio do prêmio carregado baseado no valor esperado (princípio do valor esperado)

$$\Pi_S = E(S)(1 + \theta)$$

Melhoria em relação ao prêmio de risco, onde θ representa um carregamento de segurança calculado em função do valor esperado de S .

Princípio de cálculo de prêmio

➤ Princípio da variância

$$\Pi_S = E(S) + \text{var}(S)\alpha; \quad \alpha > 0$$

➤ Princípio do Desvio padrão

$$\Pi_S = E(S) + \sigma_S \beta \quad \beta > 0$$

➤ Princípio do percentil

$$F_S(\Pi_S) = P(S \leq \Pi_S) = \alpha$$

$$P\left(Z \leq \frac{\Pi_S - E(S)}{\sigma_S}\right) = \alpha.$$

EXEMPLO 4: Considere a função de probabilidade:

$$P_{S_{col}}(s) = \begin{cases} 0,36 & s = 0 \\ 0,0240 & s = 1000 \\ 0,0724 & s = 2000 \\ 0,3864 & s = 3000 \\ 0,0164 & s = 4000 \\ 0,0384 & s = 5000 \\ 0,1024 & s = 6000 \end{cases}$$

Calcule o valor de prêmio de modo que a probabilidade de que o gasto total com sinistros não o exceda seja de 95%. Utilizando aproximação de S_{col} pela distribuição normal.

$$P_{S_{col}}(s) = \begin{cases} 0,36 & s = 0 \\ 0,0240 & s = 1000 \\ 0,0724 & s = 2000 \\ 0,3864 & s = 3000 \\ 0,0164 & s = 4000 \\ 0,0384 & s = 5000 \\ 0,1024 & s = 6000 \end{cases}$$

Solução: princípio do percentil

$$F_{S_{col}}(\Pi_S) = P(S \leq \Pi_S) = 0,95$$

$$P(S_{col} \leq \Pi_S) = 0,95$$

$$P\left(Z \leq \frac{\Pi_S - E(S)}{\sigma_S}\right) = 0,95$$

$$\frac{\Pi_S - E(S)}{\sigma_S} = Z_{0,95}$$

$$\Pi_S = 2200 + 1964,688 (1,645) = 5431,91$$

$$P_{Scol}(s) = \begin{cases} 0,36 & s = 0 \\ 0,0240 & s = 1000 \\ 0,0724 & s = 2000 \\ 0,3864 & s = 3000 \\ 0,0164 & s = 4000 \\ 0,0384 & s = 5000 \\ 0,1024 & s = 6000 \end{cases}$$

$$F_{Scol}(s) = \begin{cases} 0 & s < 0 \\ 0,36 & 0 \leq s < 1000 \\ 0,384 & 1000 \leq s < 2000 \\ 0,4564 & 2000 \leq s < 3000 \\ 0,8428 & 3000 \leq s < 4000 \\ 0,8592 & 4000 \leq s < 5000 \\ \mathbf{0,8976} & \mathbf{5000 \leq s < 6000} \\ 1 & s \geq 6000 \end{cases}$$

SOLUÇÃO:

$$F_{Scol}(\Pi_S) = P(S \leq \Pi_S) = \mathbf{0,95}$$

$$P(S_{col} \leq \Pi_S) = 0,95$$

$$P\left(Z \leq \frac{\Pi_S - E(S)}{\sigma_S}\right) = 0,95$$

$$\frac{\Pi_S - E(S)}{\sigma_S} = \mathbf{Z_{0,95}}$$

$$\Pi_S = 2200 + 1964,688 (1,645) = \mathbf{5431,91}$$

Princípio de cálculo de prêmio

➤ Princípio da utilidade Zero ou nula.

$$\mu_{s.o.}(W - G) = E[\mu_{s.o.}(W - S)]$$

$$\mu_{s.a.}(W) = E[\mu_{s.a.}(W + \Pi_S - S)]$$

EXEMPLO 5: Seja uma seguradora cuja utilidade é modelada pela função de utilidade exponencial, $\mu(x) = -\alpha e^{-\alpha x}$. Determine qual o prêmio Π_S utilizando o princípio da utilidade zero.

Seja, $\mu(x) = -\alpha e^{-\alpha x}$ e $\mu(W) = E[\mu(W + \Pi_S - S)]$, então:

$$-\alpha e^{-\alpha W} = E[-\alpha e^{-\alpha(W + \Pi_S - S)}]$$

$$e^{-\alpha W} = E(e^{-\alpha W} e^{-\alpha \Pi_S} e^{+\alpha S})$$

$$e^{-\alpha W} = e^{-\alpha W} e^{-\alpha \Pi_S} E(e^{\alpha S})$$

$$\frac{1}{e^{-\alpha \Pi_S}} = E(e^{\alpha S})$$

Logo

$$\ln e^{\alpha \Pi_S} = \ln E(e^{\alpha S})$$

$$\alpha \Pi_S = \ln E(e^{\alpha S})$$

$$\Pi_S = \frac{\ln(M_S(\alpha))}{\alpha}$$

Conhecido por alguns autores como princípio exponencial.

EXEMPLO 6: Uma seguradora atribui utilidade ao seu patrimônio através da função $\mu(s) = -\alpha e^{-\alpha s}$, com $\alpha > 0$. De acordo com o princípio da utilidade nula, o prêmio mínimo Π_s é dado por? Considere $S \sim N(n\mu, n\sigma^2)$

$$\Pi_S = \frac{\ln(M_S(\alpha))}{\alpha} \quad \text{e} \quad M_X(t) = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$$

$$\Pi_S = \frac{\ln\left(e^{n\mu\alpha + \frac{1}{2}n\sigma^2\alpha^2}\right)}{\alpha} = \frac{n\mu\alpha + \frac{1}{2}n\sigma^2\alpha^2}{\alpha}$$

$$\Pi_S = n\mu + \frac{1}{2}n\sigma^2\alpha$$

EXEMPLO 7: Uma seguradora atribui utilidade ao seu patrimônio através da função $\mu(s) = -0,9e^{-0,9s}$. De acordo com o princípio da utilidade nula, o prêmio mínimo Π_S que é pedido para um risco S , tal que $S = \sum_{i=1}^N X_i$, é dado por? Considere $X_i \sim \text{Exp}(1)$ e $N \sim \text{Po}(1)$

$$M_X(t) = \frac{1}{1-t} \quad \text{e} \quad M_N(t) = e^{(e^t-1)}$$

Como $M_{S_{col}}(t) = M_N(\ln(M_X(t)))$, então:

$$M_{S_{col}}(t) = e^{\left(\frac{1}{1-t}-1\right)}$$

Assim

$$\Pi_S = \frac{\ln(M_S(0,9))}{0,9} = \frac{\frac{1}{1-0,9}-1}{0,9} = 10$$

Princípio de cálculo de prêmio

- Princípio do prêmio de risco.

$$\Pi_S = E(S)$$

- Princípio do prêmio carregado baseado no valor esperado

$$\Pi_S = E(S)(1 + \theta)$$

- Princípio da variância

$$\Pi_S = E(S) + \text{var}(S)\alpha; \quad \alpha > 0$$

- Princípio do Desvio padrão

$$\Pi_S = E(S) + \sigma_S \beta \quad \beta > 0$$

- Princípio da utilidade Zero ou nula.

$$\mu_{s.a.}(W) = E[\mu_{s.a.}(W + \Pi_S - S)]$$

$$\mu_{s.o.}(W - G) = E[\mu_{s.o.}(W - S)]$$

- Princípio do percentil

$$F_S(\Pi_S) = P(S \leq \Pi_S) = \alpha$$

De uma forma geral os carregamentos de segurança tem como objetivo, compensar os eventuais desvios aleatórios do risco.

Bibliografia

- FERREIRA, P. P. **Modelos de precificação e ruína para seguros de curto prazo**. Rio de Janeiro: Funenseg, 2002.
- CENTENO, M. L. **Teoria do risco na actividade seguradora**. Oeiras: Celta, 2003.
- PACHECO, R. **Matemática Atuarial de Seguros de Danos**. Editora Atlas, 2014.
- RODRIGUES, J. A. **Gestão de risco atuarial**. São Paulo: Saraiva, 2008.
- PIRES, M.D.; COSTA, L.H.; FERREIRA, L.; MARQUES, R. **Teoria do risco atuarial: Fundamentos e conceitos**. Curitiba: CRV 2020.

